TITLE:
$N=1$Virasoro超代数の`妙な'表現 (組合せ論的表現論をめぐる話題)

AUTHOR(S):
庵原, 謙治

CITATION:
庵原, 謙治. $N=1$Virasoro超代数の`妙な'表現 (組合せ論的表現論をめぐる話題). 数理解析研究所講究録 2001, 1190: 1-8

ISSUE DATE:
2001-02

URL:
http://hdl.handle.net/2433/64742

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1190 巻 2001 年 1-8

$N=1$Virasoro 超代数の ` 妙な ' 表現

庵原　謙治（神戸大、理、数）
Kenji IOHARA (Kobe Univ.)

概要

ここでは、$N=1$ Virasoro 超代数の Verma 加群の内、Super 独特の表情を見せる、Ramond algebra の 'Supersymmetric Point' と呼ばれる場合について、その構造の解説を行う。詳しくは、[IK] を見られよ。

1　イントロ

ここでは、$N=1$Virasoro 超代数の定義、及び何故、特に Ramond 代数の表現が面白いかを説明する。
まず、主役の代数である、$N=1$Virasoro 超代数の定義を与えておこう：

定義 1.1 $\varepsilon \in \{\frac{1}{2}, 0\}$ に対して、$N=1$ *Virasoro* 超代数 Vir_ε とは、$\mathbb{C}$-*vector space*

$$\mathrm{Vir}_\varepsilon := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \bigoplus_{m\in\varepsilon+\mathbb{Z}} \mathbb{C}G_m \oplus \mathbb{C}c,$$

であって、以下の交換関係を満たすもの *Lie* 超代数である：

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}c, \\
[G_m, L_n] &= (m-\frac{n}{2})G_{m+n}, \\
[G_m, G_n]_+ &= 2L_{m+n} + \frac{1}{3}(m^2-\frac{1}{4})\delta_{m+n,0}c, \\
[\mathrm{Vir}_\varepsilon, c] &= \{0\}.
\end{aligned}$$

但し、$\mathbb{Z}_2$-*gradation* は以下で定める：

$$\deg L_n = \deg c = \bar{0}, \quad \deg G_m = \bar{1}.$$

$\mathrm{Vir}_{\frac{1}{2}}, \mathrm{Vir}_0$ はそれぞれ、*Neveu-Schwarz* 代数、*Ramond* 代数とも呼ばれる。

これらの Lie 超代数は三角分解

$$\mathrm{Vir}_\varepsilon = (\mathrm{Vir}_\varepsilon)_+ \oplus (\mathrm{Vir}_\varepsilon)_0 \oplus (\mathrm{Vir}_\varepsilon)_-$$

を持つ。但し、

$$(\mathrm{Vir}_\varepsilon)_\pm := \bigoplus_{\pm n>0} \mathbb{C}L_n \oplus \bigoplus_{\pm m>0} \mathbb{C}G_m, \quad (\mathrm{Vir}_\varepsilon)_0 := \begin{cases} \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}G_0 \oplus \mathbb{C}c & \varepsilon = 0, \\ \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}c & \varepsilon = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

である。よって、Highest Weight Modules を考え得るが、そこで、後の議論の必要性から、`Verma 加群（もどき）’を定義しておく。まず、$(z,h) \in \mathbb{C}^2$ とし、

$$(\mathrm{Vir}_\varepsilon)_\geq := (\mathrm{Vir}_\varepsilon)_+ \oplus (\mathrm{Vir}_\varepsilon)_0$$

とおく。

最初に、$\varepsilon = \frac{1}{2}$ の場合であるが、このときは

$$\mathbb{C}_{z,h} := \mathbb{C}\mathbf{1}_{z,h} \curvearrowleft (\mathrm{Vir}_\varepsilon)_\geq$$

を

$$L_0.\mathbf{1}_{z,h} := h\mathbf{1}_{z,h}, \quad c.\mathbf{1}_{z,h} := z\mathbf{1}_{z,h}, \qquad (\mathrm{Vir}_{\frac{1}{2}})_+.\mathbf{1}_{z,h} := \{0\}$$

で定め、Verma 加群 $M_{\frac{1}{2}}(z,h)$ を以下で定義すれば良い：

$$M_{\frac{1}{2}}(z,h) := \mathrm{Ind}_{(\mathrm{Vir}_{\frac{1}{2}})_\geq}^{\mathrm{Vir}_{\frac{1}{2}}} \mathbb{C}_{z,h}.$$

次に、$\varepsilon = 0$ の場合であるが、このときは $(\mathrm{Vir}_0)_0$ が odd element G_0 を含んでいるため、少し厄介である。まず、$(\mathrm{Vir}_0)_\geq$-加群

$$P_{z,h} := \mathbb{C}\mathbf{1}_{z,h}^{\bar{0}} \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}_{z,h}^{\bar{1}}, \qquad Q_{z,h} := \mathbb{C}\tilde{\mathbf{1}}_{z,h}^{\bar{0}} \oplus \mathbb{C}\tilde{\mathbf{1}}_{z,h}^{\bar{1}}$$

を以下で定める：

$$\begin{aligned} &L_0.v := hv, \quad c.v := zv, \quad (\mathrm{Vir}_0)_+.v := \{0\} \qquad v \in P_{z,h} \text{ (resp. } Q_{z,h}), \\ &G_0.\mathbf{1}_{z,h}^{\bar{0}} := \mathbf{1}_{z,h}^{\bar{1}}, \qquad G_0.\tilde{\mathbf{1}}_{z,h}^{\bar{0}} := (h - \frac{1}{24}z)^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{1}}_{z,h}^{\bar{1}}. \end{aligned}$$

補足 1.1 因に、包絡環のなかで以下の等式が成りたっている：

$$G_0^2 = L_0 - \frac{1}{24}c.$$

次に、$V_{z,h}$ を $P_{z,h}$ の irreducible quotient とすると、

$$V_{z,h} \cong \begin{cases} \mathbb{C}\mathbf{1}_{z,h}^{\bar{0}} & h = \frac{1}{24}z, \\ P_{z,h} & h \neq \frac{1}{24}z, \end{cases}$$

となっている。そこで、

$$M(z,h) := \mathrm{Ind}_{(\mathrm{Vir}_0)_\geq}^{\mathrm{Vir}_0} V_{z,h}, \quad \widetilde{M}(z,h) := \mathrm{Ind}_{(\mathrm{Vir}_0)_\geq}^{\mathrm{Vir}_0} Q_{z,h}, \quad N(z,h) := \mathrm{Ind}_{(\mathrm{Vir}_0)_\geq}^{\mathrm{Vir}_0} P_{z,h},$$

と置き、それぞれ Verma 加群、(pre-)Verma 加群、(quasi-)Verma 加群と呼ぶ。

補足 1.2 名前の由来であるが、やはり、$(\mathrm{Vir}_0)_{\geq}$ の既約加群の誘導表現を *Verma* 加群と呼びたいので、$M(z,h)$ を *Verma* 加群と呼ぶことにした。ところが、元来 $N(z,h)$ が *Verma* 加群と呼ばれていたので、少し降格（昇格？）させて（!?）、これを *(pre-) Verma* 加群と呼ぶことにした。こうなると、困ったのは $\widetilde{M}(z,h)$ の名前であるが、P の次の Q、ということや、その *Verma* 加群っぽさから、これを *(quasi-) Verma* 加群と呼ぶことにした。

実は、$h \neq \frac{1}{24}z$ の時、以下の同型が成立し、

$$M(z,h) \cong \widetilde{M}(z,h) \cong N(z,h).$$

$h = \frac{1}{24}z$ の時、

$$\widetilde{M}(z,\frac{1}{24}z) \cong M(z,\frac{1}{24}z) \oplus \Pi M(z,\frac{1}{24}z) \tag{1}$$

が成り立つ。但し、Π は parity を変える functor とする。

さて、ここで、通常の Lie 代数と Lie 超代数の最も大きな違いの 1 つであるが、Lie 超代数の場合、Verma 加群の同士の間の non-trivial な射が必ずしも monomorphism とは限らないことに注意しよう。実際に、以下の定理が成立する。まず、Vir_ε 加群 V 及び $\lambda \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{Z}_2$ に対して、

$$V_\lambda^\tau := \{u \in V | L_0.u = \lambda u, \deg u = \tau\}$$

とおく。このとき、

定理 1.1 $h,h' \in \mathbb{C}$ は $h \neq h'$ を満たすとする。

1. *Non-trivial* な $\mathrm{Vir}_{\frac{1}{2}}$*-module map* $\varphi : M_{\frac{1}{2}}(z,h') \longrightarrow M_{\frac{1}{2}}(z,h)$ は存在すれば、必ず単射。

2. $\varphi : M(z,h') \longrightarrow M(z,h)$ を *non-trivial* な Vir_0*-module map* とする。

   (I) $h \neq \frac{1}{24}z$　とする。

   i. $\dim\{M(z,h)_{h'}^\tau\}^{(\mathrm{Vir}_0)+} = 1$ $(\forall \tau \in \mathbb{Z}_2)$ ならば φ は必ず単射。

   ii. $\dim\{M(z,h)_{h'}^\tau\}^{(\mathrm{Vir}_0)+} = 2$ $(\forall \tau \in \mathbb{Z}_2)$ ならば φ は単射の時もあればそうでないときもある。

   (II) $h = \frac{1}{24}z$　とする。このとき、φ は必ず単射にはならない。

3. $\varphi : M(z,h') \longrightarrow \widetilde{M}(z,\frac{1}{24}z)$ を *non-trivial* な Vir_0*-module map* とする。このとき、φ が単射になるための必要十分条件は

$$\mathrm{Im}\varphi \cap M(z,\frac{1}{24}z) \neq \{0\} \quad \wedge \quad \mathrm{Im}\varphi \cap \Pi M(z,\frac{1}{24}z) \neq \{0\}$$

   である。

補足 1.3 実は、以下の等式が成り立っている：

$$\dim\{M(z,h)_{h'}^{\bar{0}}\}^{(\mathrm{Vir}_0)+} = \dim\{M(z,h)_{h'}^{\bar{1}}\}^{(\mathrm{Vir}_0)+} \leq 2.$$

つまり、Neveu-Schwarz代数$\mathrm{Vir}_{\frac{1}{2}}$は優等生過ぎて、Virasoro代数と表現論が全く同じ様に展開できてしまい、面白くないのである！　という訳で、'悪戯っ子'のRamond代数Vir_0について、特に上の定理で、非自明な射が単射にならない場合について以下でその構造を述べる。

2　Super-Symmetric Point（'悪戯っ子'の囁き？）

まず、Verma加群の射の単射性が崩れる時のVerma加群のHighest weightを書き下す。$p,q\in 2\mathbb{Z}_{>0}$は$(\frac{p-q}{2},q)=1$を満たしているとする。このとき、

$$z_{\pm}:=\frac{15}{2}\mp 3\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right),$$
$$h_i^{\pm}:=\pm\frac{1}{8}i^2pq+\frac{1}{24}z_{\pm}\quad (i\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と置く。実は、全てのhighest weightについて｀蟲潰し'で調べた結果、以下の結果を得る：

補題 2.1 $\dim\{M(z,h)^{\tau}_{h'}\}^{(\mathrm{Vir}_0)+}=2\ (\forall\tau\in\mathbb{Z}_2)$となるための必要十分条件は

$$z=z_{\sigma},\qquad h=h_i,\ h'=h_j\quad \sigma(j-i)>0$$

を満たす$p,q\in 2\mathbb{Z}_{>0},\ \sigma\in\{\pm\}$　及び$i,j\in\mathbb{Z}_{>0}$　が存在することである。

以下、簡単のため、$z=z_+$とし、p,qを固定する。

補足 2.1 既約*highest weight module* $L(z_+,h_0^+)$はいわゆる*Minimal*系列表現になっており、特に*Kac table*の対称性に関する固定点に対応していることから物理屋に*'supersymmetric point'*と呼ばれており、これは物理的にも重要、らしい。

最初に、この表現に｀出会った'時、「出来ることならややこしいnon-injective　mapとは関わらずにstoryを見たい」と思い, 定理1.1にあるinjective mapをうまく使って逃げる事を、考えていたら以下の単射からなる可換図式の存在が証明できた：

図 1: 埋め込み Diagram

$$
\begin{tikzcd}
 & \widetilde{[h_0]} & \\
{[h_1]} \arrow[ur, hook] & & {[h_1]} \arrow[ul, hook'] \\
{[h_2]} \arrow[u, hook] \arrow[urr, hook] & & {[h_2]} \arrow[u, hook'] \arrow[ull, hook'] \\
{[h_3]} \arrow[u, hook] \arrow[urr, hook] & & {[h_3]} \arrow[u, hook'] \arrow[ull, hook'] \\
{[h_4]} \arrow[u, hook] \arrow[urr, hook] & & {[h_4]} \arrow[u, hook'] \arrow[ull, hook'] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

但し、$h \in \mathbb{C}$ に対して、$[h] := M(z,h)$, $\widetilde{[h]} := \widetilde{M}(z,h)$ とする。しかし、これは同型 (1) を考えると、奇妙な話である。そこで、この図式を（あきらめて）もう少し精密みることにした。そのために、$\{M(z,h)^{\bar{0}}_{h'}\}^{(\mathrm{Vir}_0)+}$ を見てみよう。

まず、$j \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、

$$
x^{\varepsilon}_{-j} := \begin{cases} L_{-j} & \varepsilon = \bar{0}, \\ G_{-j} & \varepsilon = \bar{1} \end{cases}
$$

と置く。次に $(i_k, \varepsilon_k), \cdots, (i_1, \varepsilon_1) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_2$ 及び $\delta \in \{0,1\}$ に対して、

$$
m^{\delta}_{(i_k,\varepsilon_k),\cdots,(i_1,\varepsilon_1)} := x^{\varepsilon_k}_{-i_k} \cdots x^{\varepsilon_1}_{-i_1} (G_0)^{\delta} (1 \otimes \mathbf{1}^{\bar{0}}_{z,h})
$$

とする。このとき、

$$
\left\{ m^{\delta}_{(i_k,\varepsilon_k),\cdots,(i_1,\varepsilon_1)} \,\middle|\, \begin{array}{c} 1 \le i_1 \le \cdots \le i_k, \quad \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_k \in \mathbb{Z}_2, \quad \sum_{j=1}^{k} i_j = h' - h \\ \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j + \delta \bar{1} = \bar{0}, \quad \varepsilon_s = 1 \ \Rightarrow \ i_s < i_{s+1} \end{array} \right\}
$$

は $M(z,h)^{\bar{0}}_{h'}$ $(h \neq \frac{1}{24}z)$ の基底になる。また、$h = \frac{1}{24}z$ の時は、更に $\delta = 0$ という制限をつければ、$M(z,h)^{\bar{0}}_{h'}$ の基底を得る。簡単な計算から以下の補題が示せる：

補題 2.2 $\dim\{M(z,h)^{\tau}_{h'}\}^{(\mathrm{Vir}_0)+} = 2$ $(\forall \tau \in \mathbb{Z}_2)$ とする。このとき、

$$
w = \sum P^{\delta}_{(i_k,\varepsilon_k),\cdots,(i_1,\varepsilon_1)} m^{\delta}_{(i_k,\varepsilon_k),\cdots,(i_1,\varepsilon_1)} \in \{M(z,h)^{\bar{0}}_{h'}\}^{(\mathrm{Vir}_0)+} \setminus \{0\}
$$

は $(P^0_{(1,\bar{0})^n}, P^1_{(1,\bar{1}),(1,\bar{0})^{n-1}}) \in \mathbb{C}^2$ で *parametrize* される。

そこで、$(P,Q) := (P^0_{(1,\bar{0})^n}, P^1_{(1,\bar{1}),(1,\bar{0})^{n-1}}) \in \mathbb{C}^2$ が

$$
aP + bQ = 0 \quad (a, b \in \mathbb{C})
$$

を満たす時、w の代わりに w_{aP+bQ} と記すことにする。また、$h=\frac{1}{24}z$ かつ、$\dim\{M(z,h)^{\bar{0}}_{h'}\}^{(\mathrm{Vir}_0)+}=1$ の時、基底の形から常に $Q=0$ ゆえ、$w\in\{M(z,h)^{\bar{0}}_{h'}\}^{(\mathrm{Vir}_0)+}\setminus\{0\}$ の元を w_Q と書くことにする。

<u>記号</u>　$\exists v\in\{M(z,h)^{\bar{0}}_{h'}\}^{(\mathrm{Vir}_0)+}\setminus\{0\}$, $\exists w\in\{M(z,h)^{\bar{0}}_{h''}\}^{(\mathrm{Vir}_0)+}\setminus\{0\}$ が、$h''>h'$ かつ $w\in U((\mathrm{Vir}_0)_-)v$ を満たす時、

$$v\longrightarrow w$$

と記すことにする。 □

また、$v_{z,h}$ を $M(z,h)$ の even highest weight vector とすると、以下の図式を得る。

図 2: 特異ベクトル

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & M(z,h_0) & & & & & & & \\
h_0 & v_{z,h_0} \arrow[d] & & M(z,h_1) & & & & & \\
h_1 & w_Q \arrow[d] & & v_{z,h_1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & M(z,h_2) & & \\
h_2 & w_Q \arrow[d] & w_{2P+Q} \arrow[d] & & w_Q \arrow[d] & & v_{z,h_2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
h_3 & w_Q \arrow[d] & w_{2P+Q} \arrow[d] & & w_Q \arrow[d] & w_{2P+Q} \arrow[d] & & w_Q \arrow[d] & \\
h_4 & w_Q & w_{2P+Q} & & w_Q & w_{2P+Q} & & w_Q & \text{and so on.} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

実は、定理1.1にある単射でないnon-trivialな Vir_0-module map については、以下の定理が示せる：

定理 2.3 $j>i>0$ とし、$\varphi: M(z,h_j)\longrightarrow M(z,h_i)$ を 単射でない *non-trivial* な *Vir_0-module map* とする。このとき、

$$\varphi(v_{z,h_j})\in\mathbb{C}w_{2P+Q}\cup\mathbb{C}w_Q$$

となる。

また、このとき、$\mathrm{Ker}\varphi,\mathrm{Im}\varphi$ も簡単に記述できる。こうなると、既約highest weight module$L(z,h_0)$ の Bernstein-Gel'fand-Gel'fand 型の Resolution を得るのは簡単な話である。それは、実際、次の形をしている。

命題 2.4 以下の完全系列が存在する。

$$\cdots\longrightarrow M(z,h_2)\longrightarrow M(z,h_1)\longrightarrow M(z,h_0)\longrightarrow L(z,h_0)\longrightarrow 0.$$

さて、これで、一応Verma加群 $M(z,h_i)$ の構造については、それなりに述べたのであるが、ここまで来ると、元々のVerma加群 (pre-Verma加群) $N(z,h_0)$ の構造についても、一言述べておいた方が良いであろう。

まず、次の短完全列が存在することに注意する：

$$0 \longrightarrow \Pi M(z,\frac{1}{24}z) \xrightarrow{\iota} N(z,\frac{1}{24}z) \xrightarrow{\pi} M(z,\frac{1}{24}z) \longrightarrow 0. \tag{2}$$

このとき、以下の補題が従う：

補題 2.5 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ とするとき、

$$\{N(z,h_0)_{h_i}\}^{(\mathrm{Vir}_0)_+} \subset \mathrm{Im}\iota,$$

従って特に、$\tau \in \mathbb{Z}_2$ に対して、

$$\dim\{N(z,h_0)^{\tau}_{h_i}\}^{(\mathrm{Vir}_0)_+} = 1$$

を得る。

つまり、$M(z,\frac{1}{24}z)$ のhighest weight vector以外の特異ベクトルの π に依る引き戻しは、特異ベクトルにはなり得ない。(2) より、ベクトル空間として $N(z,\frac{1}{24}z)$ は

$$N(z,\frac{1}{24}z) = \Pi M(z,\frac{1}{24}z) \oplus M(z,\frac{1}{24}z)$$

と分解するが、この分解に関して、$N(z,\frac{1}{24}z)$ の $\Pi M(z,\frac{1}{24}z)$ への射影をprと書くことにする。また、$i \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、w_i, w_i^{Π} をそれぞれ $M(z,\frac{1}{24}z)_{h_i}, \Pi M(z,\frac{1}{24}z)_{h_i}$ に属する特異ベクトルとし、$w'_i \in \pi^{-1}(w_i)$ は $\mathrm{pr}(w'_i) \in U(\mathrm{Vir}_0).w^{\Pi}_{i-1}$ を満たすようなものを選んだとする。このとき、以下の命題が成立する：

命題 2.6 $i \in \mathbb{Z}_{>1}$ とする。このとき、

$$U((\mathrm{Vir}_0)_+).w'_i \subset U(\mathrm{Vir}_0).w^{\Pi}_{i-1}$$

が成立する。

3　おまけ & 宣伝

以上、見てきたように $N=1$Virasoro超代数もほとんどrank 2的な振る舞いをしているために、その詳細な構造はJantzen filtrationの解析で得られる。詳しいことに興味のある方は、私と大阪大学の古閑　義之氏との共同研究で得られた結果を書いた論文[IK]を見ていただきたい。

しかし、ぶっちあけた話し、大半の人は、「Superなんか、どうでもええから、もとのVirasoro代数の表現論の方がわからへんかなぁ?」と思われるであろう。そこで、それならば[FeFu]を見れば良い、と言いたいところではあるがそのような`人でなし’なことを言うのも偲びない。そこで、我々も[FeFu]と格闘すること1年強、でようやく読めたのであるが`転んでもタダでは起きぬ’とばかりに、関連内容も含めた詳細な図書[Book]を準備中なので、興味を持たれたら御一読の上、批判をしていただきたい。

最後に、ここ数年の共同研究者の1人である古閑氏及び、この短期共同研究集会の主催者である中島　達洋氏に感謝します。

参考文献

[FeFu] Feigin B.L. and Fuchs D.B., *Representations of the Virasoro algebra*, Adv. Stud. Contemp. Math. **7**, 465–554, Gordon and Breach Science Publ. New York, 1990.

[IK] Iohara, K. and Koga, Y., *Representation Theory of Neveu-Schwarz and Ramond Algebras* I*: Verma Modules*, preprint.

[Book] Iohara, K. and Koga, Y., 図書、準備中.